Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs

30 april, 2011 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.

Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

1. Bevisa att om A är en inverterbar matris så är det $A \neq 0$. (3p)

   Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 204.) $\square$

2. För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y & = & 1 \\ x - y + z & = & a \\ 2x - 2y - az & = & 0 \end{cases}$$

   entydig lösning, och vad är den? (4p)

   Lösning:

$$\begin{cases} ax + y & = & 1 \\ x - y + z & = & a \\ 2x - 2y - az & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} ax + y & = & 1 \\ ax - ay + az & = & a^2 \\ 2x - 2y - az & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} ax + y & = & 1 \\ (2+a)x - (2+a)ay & = & a^2 \\ 2x - 2y - az & = & 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a(2+a)x + (2+a)y & = & 2+a \\ (2+a)x - (2+a)ay & = & a^2 \\ 2x - 2y - az & = & 0 \end{cases} \sim \begin{cases} (a(2+a) + (2+a)) & = & 2+a+a^2 \\ x - y & = & a^2/(2+a) \\ 2x - 2y - az & = & 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \tfrac{2+a+a^2}{(2+a)(1+a)} \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{2+a+a^2}{(2+a)(1+a)} - \tfrac{a^2}{2+a} = \tfrac{2+a+a^2}{(2+a)(1+a)} \quad \Rightarrow \quad z = a - x - y = \tfrac{2a(1+a)}{(2+a)(1+a)} = \tfrac{2a}{2+a}.$$

   Alltså har vi den entydiga lösningen $(x, y, z) =$

   $= \left(\tfrac{2+a+a^2}{(2+a)(1+a)}, \tfrac{2+a-a^3}{(2+a)(1+a)}, \tfrac{2a}{2+a}\right)$ om och endast om $a \neq -1$ och $a \neq -2$. $\square$

3. En liksidig triangel är inskriven i det 3-dimensionella koordinatsystemet. Två av hörnen är $(1, 1, 1)$ och $(-1, 1, 0)$ och det tredje hörnet ligger på den positiva halvan av y-axeln. Bestäm ekvationen för det plan som triangeln spänner. (3p)

   Lösning: Triangelns hörn i $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0)$ och $(0, y, 0)$ där $y > 0$. Eftersom triangeln är likbent måste
   antingen I: $|(1, 1, 1) - (-1, 1, 0)| = |(1, 1, 1) - (0, y, 0)|$
   eller II: $|(-1, 1, 0,) - (1, 1, 1)| = |(-1, 1, 0) - (0, y, 0)|$
   eller III: $|(-1, 1, 0) - (0, y, 0)| = |(1, 1, 1) - (0, y, 0)|$.

I. $|(1,1,1)-(-1,1,0)|^2 = (1-(-1))^2+(1-1)^2+(1-0)^2 = 5$
$|(1,1,1)-(0,y,0)|^2 = (1-0)^2+(1-y)^2+(1-0)^2 = 3-2y+y^2$
$\Rightarrow\ y^2-2y-2=0\ \Rightarrow\ y=1\pm\sqrt{3}.$
Eftersom $y>0$ är då $y=1+\sqrt{3}$.
$(1,1,1):\ 1+\beta+\gamma+\delta=0$
$(-1,1,0):\ -1+\beta+\delta=0$
$(0,1+\sqrt{3},0):\ (1+\sqrt{3})\beta+\delta=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{3})\beta+(1+\sqrt{3})\delta &= 1+\sqrt{3} \\ (1+\sqrt{3})\beta+\delta &= 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ (1+\sqrt{3}-1)\delta = 1+\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \delta = 1+\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow\ \beta = 1-\delta = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ \gamma = -1-\beta-\delta = -1+\sqrt{1}\sqrt{3}-1-\frac{1}{\sqrt{3}} = -2$
Alltså är planet $x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-2z+1+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$.

II. $|(-1,1,0)-(1,1,1)|^2 = 5$
$|(-1,1,0)-(0,y,0)| = (-1-0)^2+(1-y)^2+0^2 = 2-2y+y^2$
$\Rightarrow\ y^2-2y-3=0\ \Rightarrow\ y=1\pm 2.$
Eftersom $y>0$ är i detta fall $y=3$.
$(1,1,1):\ 1+\beta+\gamma+\delta=0$
$(-1,1,0):\ -1+\beta+\delta=0$
$(0,3,0):\ (1+\sqrt{3})\beta+\delta=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\beta+3\delta &= 3 \\ 3\beta+\delta=0 & \end{cases} \Rightarrow\ \delta=\frac{3}{2}$$

$\beta = 1-\delta = -\frac{1}{2}$
$\gamma = -1-\beta-\delta = -1+\frac{1}{2}-\frac{3}{2} = -2.$
Alltså är planet i detta fall $x-\frac{1}{2}y-2z+\frac{3}{2}=0$.

III. $|(-1,1,0)-(0,y,0)|^2 = 2-2y+y^2$
$|(1,1,1)-(0,y,0)|^2 = 3-2y+y^2$
Men dessa kan inte vara lika för något y så detta alternativ är omöjligt.

Alltså är planet $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}z+1+\sqrt{3}=0$ eller $2x-y-4z+3=0$. □

4. Låt π vara planet $x+3y-z=2$ och P koordinattrippeln $(a,2,-1)$. Beräkna
   (a) (minsta) avståndet mellan punkten P och π om $a=3$. (3p)
   (b) de värden på a som gör att längden av $\boldsymbol{u}$ blir $\sqrt{2}$, där $\boldsymbol{u}$ är den vektor i π som är ortogonal mot vektorn P. (4p)

Lösning:

(a) Planets normal är $\boldsymbol{n}=(1,3,-1)$. Kortaste avståndet från $P=(3,2,-1)$ är det som går längs $\boldsymbol{n}=(1,3,-1)$ tills man når π, dvs tills man är framme i en punkt $(x,y,z):\ x+3y-z=2$. Alltså har vi ekvationen $(3,2,-1)+a(1,3,-1) = (x,y,x+3y-2)$, dvs

$$\begin{cases} a-x &= -3 \\ 3a \quad -y &= -2 \\ a+x+3y &= 1 \end{cases} \sim \begin{cases} a-x &= -3 \\ 3a \quad -y &= -2 \\ 2a \quad +3y &= -2 \end{cases} \sim \begin{cases} a-x &= -3 \\ 11a &= -8 \\ 3a \quad -2y &= -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ a = -\frac{8}{11} \Rightarrow\ y = 3a + 2 = -\frac{2}{11}$
$\Rightarrow\ x = a + 3 = \frac{25}{11}\ \Rightarrow\ z = x + 3y - 2 = -\frac{3}{11}$.
Kortaste sträckan går alltså mellan $(3, 2, -1)$ och $\frac{1}{11}(25, -2, -3)$. Avståndet är därmed $|(3, 2, -1) - \frac{1}{11}(25, -2, -3)| = \frac{1}{11}\sqrt{(33-25)^2 + (22+2)^2 + (-11+3)^2} = \frac{11 \cdot 64}{11} = \frac{8}{\sqrt{11}}$.

Om vi istället bara hade använt avståndsformeln hade vi fått de lite kortare räkningarna: $\frac{|\boldsymbol{n} \cdot P - 2|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) - 2}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}}$.

(b) Planets normal är $\boldsymbol{n} = (1, 3, -1)$. Alla vektorer som är ortogonala mot normalen är parallella med planet. Speciellt är $\boldsymbol{n} \times P$ ortogonal mot $\boldsymbol{n}$, dvs en vektor i planet π och även ortogonal mot P.
$\boldsymbol{n} \times P = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a & 2 \end{vmatrix} \right) = (-1, -a + 1, 2 - 3a)$. Vi får då den kvadrerade längden $2 = |\boldsymbol{n} \times P|^2 = (-1)^2 + (1-a)^2 + (2-3a)^2 = 6 - 14a + 10a^2 \Rightarrow a^2 - 1.4a + 0.4 = 0 \Rightarrow a = 0.7 \pm \sqrt{0.09} = 0.4$ och 1. $\square$

5. Låt $\boldsymbol{e}'_1 = \frac{1}{7}(2, -6, 3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = \frac{1}{7}(3, -2, -6)$ och $\boldsymbol{e}'_3 = \frac{1}{7}(6, 3, 2)$.

(a) Visa att $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ är en ON-bas. (3p)

(b) Vad blir koordinaterna för $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ med avseende på $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$? (3p)

Lösning:

(a) Ska visa att $|\boldsymbol{e}'_i| = 1$ och att $i \neq j\ \Rightarrow\ \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = 0$. Vi får
$|\boldsymbol{e}'_1|^2 = \frac{1}{49}(4 + 36 + 9) = 1$, $|\boldsymbol{e}'_2|^2 = \frac{1}{49}(9 + 4 + 36) = 1$, $|\boldsymbol{e}'_3|^2 = \frac{1}{49}(36 + 9 + 4) = 1$
$\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = \frac{1}{49}(6 + 12 - 18) = 0$, $\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = \frac{1}{49}(12 - 18 + 6) = 0$, $\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = \frac{1}{49}(18 - 6 - 12) = 0$.

(b) Det nya sytemet kan uttryckas
$\boldsymbol{e}'_1 = \frac{2}{7}\boldsymbol{e}_1 - \frac{6}{7}\boldsymbol{e}_2 + \frac{3}{7}\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}'_2 = \frac{3}{7}\boldsymbol{e}_1 - \frac{2}{7}\boldsymbol{e}_2 - \frac{6}{7}\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}'_3 = \frac{6}{7}\boldsymbol{e}_1 + \frac{3}{7}\boldsymbol{e}_2 + \frac{2}{7}\boldsymbol{e}_3$
Därmed är koordinaterna (x'_1, x'_2, x'_3) för $(1, 2, 3)$ i det nya systemet
$x'_1 = \frac{2}{7} \cdot 1 - \frac{6}{7} \cdot 2 + \frac{3}{7} \cdot 3 = -\frac{1}{7}$
$x'_2 = \frac{3}{7} \cdot 1 - \frac{2}{7} \cdot 2 - \frac{6}{7} \cdot 3 = -\frac{19}{7}$
$x'_3 = \frac{6}{7} \cdot 1 + \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{18}{7}$
Alltså är punkten $\frac{1}{7}(-1, -19, 18)$ i det nya systemet. $\square$

6. Antag att A är en *skevsymmetrisk* matris av udda dimension, dvs $A^T = -A$ och $\dim A$ är udda. Visa att A är singulär. (4p)

Lösning: $\det A = \det(A^T) = \det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^n \det A = -\det A$ eftersom $\dim A = n$ var udda. Därmed är $\det A + \det A = 0$, dvs $\det A = 0$, dvs A är singulär. $\square$

7. Bestäm alla egenvärden till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3p)$$

Lösning: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$ {utveckling efter kolonn 3} $=$

$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$ utveckling efter rad 1} $=$

$= (1-\lambda)\Big((1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}\Big) = (1-\lambda)\Big((1-\lambda)\lambda^2 + (1-\lambda)\Big) =$

$= (1-\lambda)^2(\lambda^2+1) \;\Rightarrow\;$ Egenvärdena är $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i.$ $\square$