Lösningsförslag Flervariabelanalys, 2011-05-27.

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^3 - y^3 + z^2 = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$. *(2p)*

   Svar:
   Bestämmer först gradienten i den givna punkten:

   $$\nabla(x^3 - y^3 + z^2)_{(1,1,1)} \;=\; (3x^2, -3y^2, 2z)_{(1,1,1)} \;=\; (3, -3, 2).$$

   En ekvation för tangentplanet är då:

   $$3(x-1) + (-3)(y-1) + 2(z-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x - 3y + 2z = 2.$$

2. Vi har givet funktionen $f(x, y, z) = x^2 - xy + z^3$.
   Bestäm det maximala värdet för riktningsderivatan till f i punkten $(2, 3, 1)$. *(2p)*

   Svar:
   Det maximala värdet för riktiningsderivatan är beloppet/längden av gradienten i den givna punkten:

   $$|\nabla f(x, y, z)|_{(2,3,1)} \;=\; |(2x - y, -x, 3z^2)|_{(2,3,1)} \;=\; |(1, -2, 3)| = \sqrt{14}.$$

3. Bestäm följande gränsvärde eller visa att det inte existerar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y}{x - 1}$. *(2p)*

   Svar:
   Sätt t.ex. $(x, y) = (t, t)$ och låt $t \to 1$:

   $$\frac{x^2 - y}{x - 1} \;=\; \frac{t^2 - t}{t - 1} \;=\; t \;\to 1.$$

   Jämför med $(x, y) = (t, t^2)$ (och, som ovan, låt $t \to 1$):

   $$\frac{x^2 - y}{x - 1} \;=\; \frac{t^2 - t^2}{t - 1} \;=\; 0.$$

   De två olika resultaten är tillräckligt bevis för att gränsvärdet *inte* existerar.

4. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\oint_C (x - x^2y)\,dx \;+\; xy^2\,dy,$

   där C är enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ genomlöpt en gång i positiv led. *(2p)*

Svar:
Sätt $P = x - x^2y,\ \ Q = xy^2$ och använd Greens formel, där området D blir enhetsdisken $x^2 + y^2 \leq 1$:

$$\oint\limits_C (x - x^2y)\,dx \;+\; xy^2\,dy \;=\; \iint\limits_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) \;-\; \frac{\partial}{\partial y}(x - x^2y)\Big)\,dxdy \;=$$

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy \;=\; \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} r^3\,dr\,d\varphi \;=\; 2\pi\left[\frac{1}{4}\,r^4\right]_0^1 \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

5. Bestäm det största och minsta värdet för $f(x, y) \;=\; xy$
under bivillkoret $x^2 + 2y^2 \;=\; 4.$ *(3p)*

Svar:
Vi använder Lagranges multiplikatormetod, där vi låter $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ representera bivillkoret:

$$\left.\begin{array}{lcl}\frac{\partial f}{\partial x} & = & \lambda\frac{\partial g}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{lcl} y & = & 2\lambda x\\ x & = & 4\lambda y\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} \;=\; \frac{2\lambda x}{4\lambda y} \;\Rightarrow\; x^2 \;=\; 2y^2.$$

Notera att vi kan förutsätta $x,\ y,\ \lambda \neq 0$ eftersom $(x, y) \;=\; (0, 0)$ inte är konsistent med bivillkoret. Resultatet ovan insatt i bivillkoret ger:

$2y^2 + 2y^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; y = \pm 1.$ Återinsatt i $x^2 = 2y^2$ ger detta punkterna:

$(-1, -\sqrt{2}),\ (-1, \sqrt{2}),\ (1, -\sqrt{2}),\ (1, \sqrt{2}).$

Funktionsvärden: $\quad f(-1, \sqrt{2}) = (1, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\quad f(1, \sqrt{2}) = (-1, -\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$

Vi får största och minsta värden: $\ f_{max} = \sqrt{2},\ \ f_{min} = -\sqrt{2}.$

Alternativt kan bivillkoret parametriseras $\ (x, y) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t),\ \ 0 \leq t < 2\pi.$ Det ger:

$f(2\cos t, \sqrt{2}\sin t) \;=\; 2\sqrt{2}\cos t \sin t = \sqrt{2}\sin 2t.$

Vi får därför $\ -\sqrt{2} \leq f(x, y) \leq \sqrt{2}$ om $x^2 + 2y^2 = 4$; och därmed samma slutsats som ovan.

6. Bestäm den allmänna lösningen $f(x, y)$ till differentialekvationen

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} \;+\; \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} \;=\; x^4 - y^4\,,\ \ (x, y > 0).$$

Ledning: Använd variabelbytet $\ u \;=\; x^2 + y^2\,,\ \ v \;=\; x^2 - y^2\,.$ *(3p)*

Svar:
Det föreslagna variabelbytet ger:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \;+\; \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \;=\; 2x\,\frac{\partial f}{\partial u} \;+\; 2x\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\,\frac{\partial f}{\partial u} - 2y\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Insatt i den ursprungliga ekvationen:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = x^4 - y^4 \Leftrightarrow 4\,\frac{\partial f}{\partial u} = uv \Leftrightarrow f = \frac{1}{8}u^2 v + g(v),$$

där g är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel. Återsubstitution av de ursprungliga variablerna ger den allmänna lösningen

$$f(x,y) = \frac{1}{8}\,(x^2+y^2)^2\,(x^2-y^2) + g(x^2-y^2).$$

7. Bestäm arean av den del av sfären $x^2+y^2+z^2=9$ för vilken $1 \le z \le 2$. *(3p)*

Svar:
Alt. 1: Ytan, S, vi vill beräkna arean för kan uppfattas som en del av grafen för

$z(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$.

Vidare gäller $1 \le z \le 2$ och därmed har vi $5 \le x^2+y^2 \le 8$.

Med $r = \sqrt{x^2+y^2}$ blir projektionen av ytan (i planpolära koordinater) givet av

$\sqrt{5} \le r \le 2\sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Vi får :

$$\iint_S dS = \iint_{S_{xy}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{3}{\sqrt{9-r^2}}\,r\,dr\,d\varphi = 6\pi\left[-\sqrt{9-r^2}\right]_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} = 6\pi.$$

Alt. 2: Parametrisera ytan i sfäriska koordinater :

$\mathbf{r} = (x,y,z) = 3(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),\quad 0 \le \varphi < 2\pi,\quad \arccos(\tfrac{2}{3}) \le \theta \le \arccos(\tfrac{1}{3})$.
Det ger:

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi}\int_{\arccos(\frac{2}{3})}^{\arccos(\frac{1}{3})} |\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi|\,d\theta\,d\varphi = 9\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos(\frac{2}{3})}^{\arccos(\frac{1}{3})} \sin\theta\,d\theta =$$

$$18\pi\Big[-\cos\theta\Big]_{\arccos(\frac{2}{3})}^{\arccos(\frac{1}{3})} = 6\pi.$$

8. Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2}\,dx\,dy$,

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le x-y \le 1\}$. *(3p)*

Svar:
Kvadraten D i $xy-$planet transformeras till en kvadrat

$D_{uv}: \ 0 \le u \le 1, \ 0 \le v \le 1$ genom variabelbytet :

$u = x + y, \ v = x - y$. Det ger $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = \left(\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1} = -\dfrac{1}{2}$.

Integralen blir då:

$$\iint_{\Delta} \frac{x+y}{1+(x-y)^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{u}{1+v^2}\,|-\frac{1}{2}|\,du\,dv =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u\,du \int_0^1 \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,u^2\right]_0^1 \left[\arctan v\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

9. Bestäm det största och minsta värdet för $g(x,y) = (2x^2+y^2)\,e^{-x^2-y^2}$

i området $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4\}$. *(5p)*

Svar:
Bestäm först alla stationära punkter:

$$\begin{array}{lcl} g_x & = & 0 \\ g_y & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} 2xe^{-x^2-y^2}(2-2x^2-y^2) & = & 0 \\ 2ye^{-x^2-y^2}(1-2x^2-y^2) & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$(x=0 \ \vee \ 2x^2+y^2=2) \ \wedge \ (y=0 \ \vee \ 2x^2+y^2=1) \ \Leftrightarrow$

$(x,y)=(0,0) \ \vee \ (x,y)=(0,\pm1) \ \vee \ (x,y)=(\pm1,0)$.

Notera att alla dessa (5) punkter är inre punkter för A.

Sedan betraktar vi värden för g på randen av A, dvs cirkeln $x^2+y^2=4$.
Denna parametriseras lämpligen som $(x,y)=(2\cos t, 2\sin t)$. Insatt:

$$g(2\cos t, 2\sin t) = (8\cos^2 t + 4\sin^2 t)\,e^{-4} = 4(1+\cos^2 t)\,e^{-4}.$$

Från uttrycket ovan ser vi att det största respektiva minsta värdet för g på randen till A är $g(\pm2,0)=8e^{-4}$ och $g(0,\pm2)=4e^{-4}$.

Slutligen jämförs dessa värden med funktionsvärden i de inre kritiska punkterna

$g(0,0)=0, \ g(0,\pm1)=e^{-1}, \ g(\pm1,0) = 2e^{-1}$.

Eftersom $8e^{-4} = \left(\dfrac{2}{e}\right)^3 e^{-1} < 2e^{-1}$ får vi följande största och minsta värden i området A:

$g_{max}=2e^{-1}, \ g_{min}=0$.

10. Beräkna $\displaystyle\iiint_K \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$,

där $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\,\}$. *(5p)*

Svar:

Integrandens och integrationsområdets utseende innebär att rymdpolära koordinater är lämpligt. Gränserna blir:

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \cos\theta \geq \sin\theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Vi får:

$$\iiint_K \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \frac{1}{1+r}\,r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta \int_0^1 \frac{r^2}{1+r}\,dr = 2\pi\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \Big(r - 1 + \frac{1}{1+r}\Big)\,dr =$$

$$= \pi\,(2-\sqrt{2})\left[\frac{1}{2}\,r^2 - r + \ln(r+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,(2-\sqrt{2})\,(2\ln 2 - 1).$$